

© 2021 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

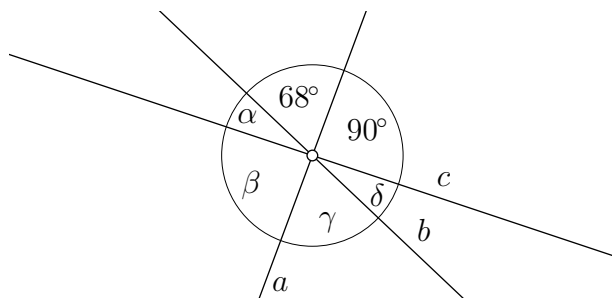
610711

In einem alten Buch mit mathematischen Knocheleien fand sich folgender Vers:

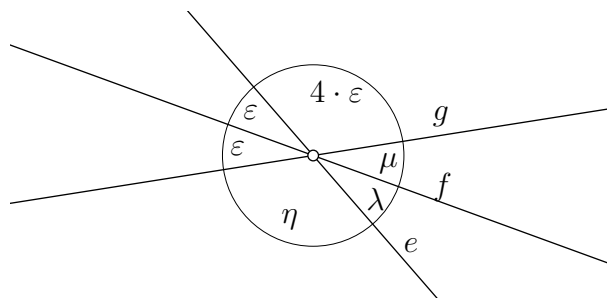
Eine Zahl hab ich gewählt,
107 zugezählt,
dann durch 100 dividiert
und mit 11 multipliziert,
endlich 15 subtrahiert,
und zuletzt ist mir geblieben
als Resultat die Primzahl 7.

Ermittle alle möglichen Zahlen, die gewählt werden können, damit der Vers zu einer wahren Aussage wird.

610712



A 610712 a



A 610712 b

- a) Die nicht maßstabsgerechte Abbildung A 610712 a zeigt drei Geraden a , b und c , die einander in einem Punkt schneiden und Winkel der Größen α , β , γ , δ , 90° und 68° bilden.
Berechne die Winkelgrößen α , β , γ und δ .
- b) Die nicht maßstabsgerechte Abbildung A 610712 b zeigt drei Geraden e , f und g , die einander in einem Punkt schneiden und Winkel der Größen ε , ε , η , λ , μ und $4 \cdot \varepsilon$ bilden.
Berechne die Winkelgrößen ε , η , λ und μ .

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

610713

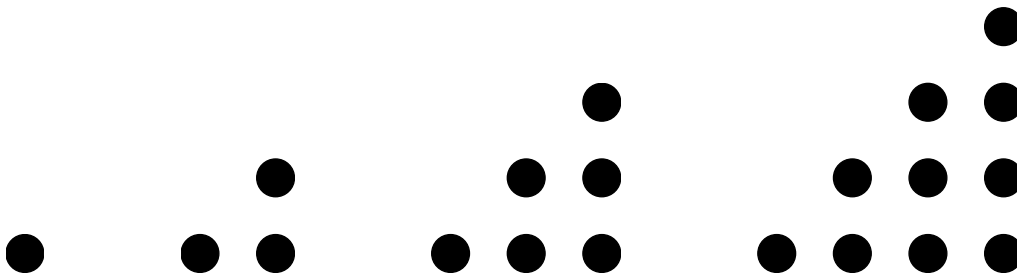
Um von der Haustür zur Wohnungstür zu gelangen, muss Mia eine Treppe mit genau sieben Stufen überwinden. Mit einem Schritt kann sie höchstens drei Stufen nehmen. Daher sind zum Beispiel folgende Schrittfolgen möglich:

- 1 Stufe – 2 Stufen – 3 Stufen – 1 Stufe
- 3 Stufen – 2 Stufen – 2 Stufen
- 2 Stufen – 3 Stufen – 2 Stufen

Ermittle die Anzahl aller Schrittfolgen, die Mia für diese Treppe nehmen kann.

610714

In der Abbildung sind vier Muster aus Punkten gezeigt. Das erste Muster besteht nur aus einem Punkt, beim zweiten kommen zwei Punkte hinzu, beim dritten kommen drei Punkte hinzu, beim vierten kommen vier Punkte hinzu.



Allgemein entsteht das n -te Muster durch Hinzufügen von n Punkten zum vorherigen Muster. Die Punkte sind dabei ab dem zweiten Muster in Form eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks angeordnet. Die Anzahl der Punkte im n -ten Muster heißt daher n -te Dreieckszahl und wird mit d_n bezeichnet. Wie man der Abbildung entnehmen kann, gelten $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 6$ und $d_4 = 10$.

- a) Berechne die Dreieckszahlen d_5 , d_6 , d_7 und d_8 .
- b) Finde eine Formel, mit deren Hilfe man die n -te Dreieckszahl d_n berechnen kann, und berechne d_{15} .
- c) Wir bezeichnen mit s_n die Summe der Reziproken der ersten bis zur n -ten Dreieckszahl. Es gelten also $s_1 = \frac{1}{d_1}$, $s_2 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$, $s_3 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3}$ und so weiter. Berechne die Zahlen s_2 bis s_6 .
- d) Finde eine Vermutung für die Formel, mit deren Hilfe man s_n berechnen kann, und berechne s_{99} . Ein Beweis dieser Formel wird nicht erwartet.